ECI Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

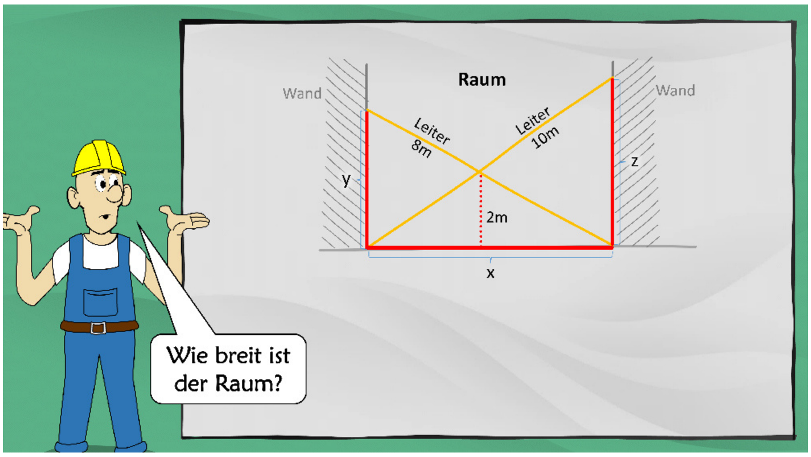
MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

06.01.2022

Das Problem der gekreuzten Leitern

Beim Blättern im BLOG
https://scienceblogs.de/klausis-krypto-kolumne/2021/11/26/das-problem-der-gekreuzten-leitern/

stieß ich auf das Problem der gekreuzten Leitern und die Frage von Herrn Schmeh.
Er schrieb:



Im Zusammenhang mit der Post-Quanten-Kryptografie spielt das Problem der gekreuzten Leitern eine Rolle. Es ist einfach zu erklären, aber nur schwer zu lösen.

Das Problem der gekreuzten Leitern. Dies ist eine mathematische Fragestellung, die scheinbar ein Mittelstufenschüler lösen kann – mit dem Strahlensatz und dem Satz des Pythagoras. Doch was recht einfach aussieht, entpuppt sich als nahezu unlösbar. Von mehreren Dutzend Seminarteilnehmern, denen ich die Knobelei damals vorstellte, konnte sie keiner lösen. Dabei waren sogar Mathematiker unter den Teilnehmern.
Solche Fragestellungen spielen für bestimmte Krypto-Verfahren eine Rolle, mit denen ich gerade zu tun habe."

Fangen wir mit dem Problem der gekreuzten Leitern an. Es wird auch als "Leiterproblem" bezeichnet, was aber missverständlich ist, denn es gibt in der Mathematik mehrere Fragestellungen, die sich um Leitern drehen, wie man hier nachlesen kann.
Das Problem der gekreuzten Leitern ist in der folgenden Grafik dargestellt (die angegeben Zahlen sind natürlich nur Beispiele):

Gegeben sind also zwei Leitern in einem Raum, die sich kreuzen. **Die Längen der Leitern sowie die Höhe des Kreuzungspunkts sind bekannt.**
Die Frage ist: Wie breit ist der Raum?

Wie löst man das Problem?

Um die Frage zu beantworten, kann man mithilfe des Strahlensatzes und des Satzes von Pythagoras drei Gleichungen aufstellen. Nach meinen Berechnungen sehen diese so aus:

$$x^2+y^2=64$$
$$x^2+z^2=100$$
$$xy=16$$

(Aber wie kommst du auf die dritte Gleichung xy=16?)
(Fragte ein Leser)

Aus dem Strahlensatz ergibt sich:
$8/x=y/2$
Das kann man in $xy=16$ umformen.
Analog erhält man $xz=20$. Ich frage mich gerade, ob man das als vierte Gleichung dazu nehmen muss.

Die Frage ist nun, wie man dieses Gleichungssystem löst. Mit dem Gauß-Algorithmus kommt man nicht weit. Hans Dobbertin meinte jedoch, dass es eine andere Methode gäbe. Er dachte wahrscheinlich an so genannte Gröbner-Basen, denn diese spielen in der Post-Quanten-Kryptografie eine Rolle (siehe unten).
Leider bin ich nie dazu gekommen, mich mit Gröbner-Basen zu beschäftigen. Kann ein Leser hier eine verständliche Erklärung liefern und sagen, wie man diese für die Lösung des Problems nutzt?
In der englischsprachigen Wikipedia gibt es einen eigenen Eintrag zum Problem der gekreuzten Leitern.
Dort werden mehrere Lösungswege diskutiert. Kann ein Leser damit die hier vorgestellte Version lösen?
Vermutlich kann man für diesen Zweck auch eine Mathematik-Software nutzen, die Gleichungssysteme löst. Wolfram Alpha wäre wohl eine Möglichkeit. Hat ein Leser Erfahrung damit?
Soweit der Kommentar des Autors

So begann ich mich mit dem Problem zu befassen, merkte aber sehr schnell, dass es ein Wolf im Schafspelz ist.
Es sieht sehr einfach aus, entzieht sich dann aber mit konstanter Boshaftigkeit der Lösung.

Meine erste Überlegung zur Lösung, ging wie Herr Schmeh davon aus, ein Gleichungssystem aufzustellen.
Die beiden Pythagoras Gleichungen sehen ja auch schon schick aus.

Begleiten Sie mich also durch den Irrgarten bis zur Lösung des Problems.

ECI Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

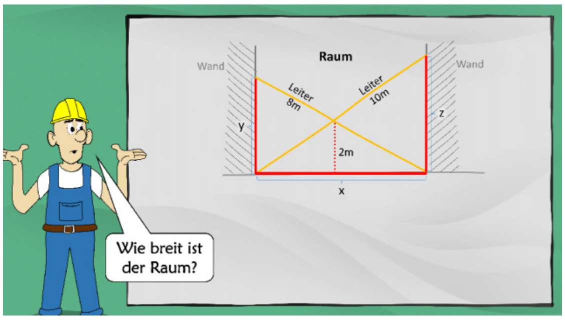
BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

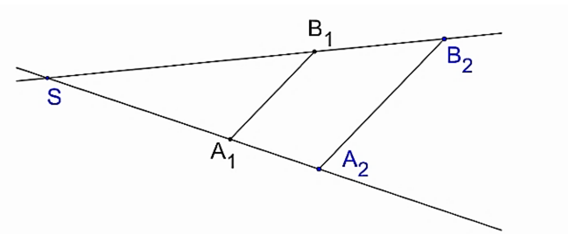
Lösungsversuch 1, ein Gleichungssystem aufbauen.

Es gibt laut Autor drei Gleichungen und drei Variablen. Das würde normal passen.

Problem, die dritte Gleichung nach dem Strahlensatz ist falsch!
Der Autor sagte: Aus dem Strahlensatz ergibt sich:
8/x=y/2



Bei Betrachtung der Parallelen gilt der zweite Strahlensatz, es gilt danach:



Das würde in diesem Strahlensatzbild entsprechen:
x = S_A2
8 = S_B2
und
y = A2_B2
2 = A1_B2

$$\frac{8}{x} = \frac{y}{2} \; also \; \frac{S\_B2}{S\_A2} = \frac{A2\_B2}{A1\_B2}$$

Definiert sind nach dem 2. Strahlensatz aber nur folgende Beziehungen.

$$\frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{A_2B_2}|} = \frac{|\overline{SA_1}|}{|\overline{SA_2}|} \quad (4)$$

$$\frac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{A_2B_2}|} = \frac{|\overline{SB_1}|}{|\overline{SB_2}|} \quad (5)$$

Das passt also nicht!

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Ich rechnete es dennoch mal mit den Beispielzahlen durch.

I $x^2 + y^2 = 64$

II $x^2 + z^2 = 100$

III $x * y = 16$
---
aus I => $y^2 = 64 - x^2$ => $y = \sqrt{64 - x^2}$

in III
=> $x * \sqrt{64 - x^2} = 16$ quadrieren => $x^2 * (64 - x^2) = 16^2$ => $64x^2 - x^4 = 16^2$

=> $-x^4 + 64x^2 = 16^2$ = $-x^4 + 64x^2 = 256$ = $-x^4 + 64x^2 - 256 = 0$

mit -1 multiplizieren.
=> $x^4 - 64x^2 + 256 = 0$

Das entspricht im Prinzip einer quadratischen Gleichung. Substitution mit $a = x^2$

=> $a^2 - 64a + 256 = 0$
Es gilt:
$f(x) = x^2 + px + q = 0 \qquad \text{mit } (p, q = \text{const.})$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

=> $a_{1,2} = \frac{64}{2} (\pm) \sqrt{\frac{-64^2}{4} - 256}$

$$a_1 = \frac{64}{2} + \sqrt{\frac{-64^2}{4} - 256} = 59{,}7m$$

es war $a = x^2$ => $x = \sqrt{a} = \sqrt{59{,}7} = 7.73m$

$$a_2 = \frac{64}{2} - \sqrt{\frac{-64^2}{4} - 256} = 4{,}3m$$

es war $a = x^2$ => $x = \sqrt{a} = \sqrt{4{,}3} = 2{,}0m$

Das Ergebnis, ist (wie allerdings auch erwartet) Müll.

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Ein Problem habe ich beim Nachdenken schon gefunden.

Die beiden Pythagoras Gleichungen passen nicht. Das sind nämlich nicht 2 unabhängige Gleichungen**,** weil sie ja mit einer dritten Forderung verknüpft sind, nämlich, die Hypotenusen müssen sich im gleichen X-Punkt bei der vorgegebenen Höhe schneiden.
Diese Tatsache ging aber im Gleichungssystem gar nicht ein.

Man kann also sagen, es gab zu wenig unabhängige Gleichungen.

Es war für mich der Punkt, sich von der direkten Aufstellung eines Gleichungssystems zu verabschieden und andere Wege zu suchen.

Eine sehr scharmante Möglichkeit die ich fand, ist folgende, das Problem grafisch zu lösen.
Diese Möglichkeit bietet sich häufig bei komplexen Problemen an. Grafische Lösungen sind allerdings für weitergehende Verwendungen meist nicht zu gebrauchen, man kann dadurch aber schon mal die Richtung sehen, um dann gegebenenfalls mit Gleichungen weiterzukommen.

In dem Beispiel auf der nächsten Seite wurden andere Zahlen verwendet, aber das kann man anpassen.

ECI Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

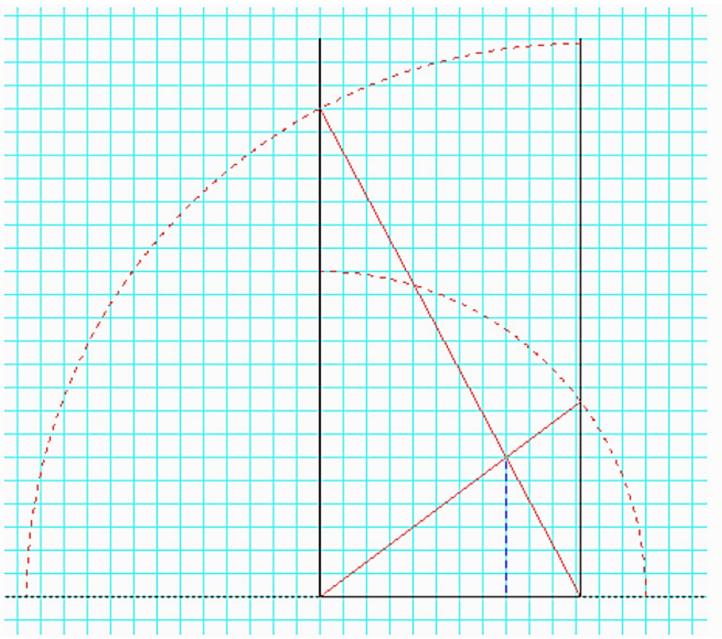
Lösungsversuch 2. Grafisch lösen:

Dieses Beispiel geht auf Professor Norbert Treitz zurück.
Norbert Treitz (1944–2017) war Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen.

Zwei (streckenförmige, also unendlich dünne und sich nicht durchbiegende!) Leitern der Längen 11,9 m und 7 m stehen zwischen zwei senkrechten Hauswänden, nach deren Abstand gefragt wird, ihr Schnittpunkt ist 3 m über dem (waagerechten) Fußboden:

Diese Aufgabe ist leider nicht annähernd so leicht, wie sie aussieht, denn sie geht über Gleichungen mit 4. Potenzen ("biquadratisch"), die sich nur sehr umständlich oder eben näherungsweise lösen lassen.
Unser Zahlenbeispiel (das auf A. A. Bennett 1941 zurückgeht) geht ganzzahlig in Dezimetern auf, sogar in den Zwischen- und Neben-Ergebnissen. Es sei zum Probieren noch verraten, dass die Abstände des Schnittpunkts von den beiden Wänden in einem Verhältnis aus ziemlich kleinen ganzen Zahlen zueinander stehen.

Das Problem ist, es müssen drei Geraden so verschoben werden, dass sie einen gemeinsamen Schnittpunkt bilden.
Von dem Schnittpunkt wissen wir nur, dass er auf 3 m Höhe liegt.
Es werden zwei Kreisbögen geschlagen. Auf diesen beiden Kreisbögen wandern die Spitzen der Leitern.
Nun werden die beiden Leitern so gekippt, dass sie sich auf 3 m kreuzen.
hier mit 0,5-m-Raster:



Der Abstand der Häuser beträgt 5,6 m. Der Schnittpunkt der Leitern ist 4 m von der linken und 1,6 m von der rechten Wand entfernt.

ECI Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Lösungsweg 3, über Ähnlichkeit von Dreiecken

es stammt aus Mathematik aus dem Hinterhalt.

Dabei wird die Trigonometrie mit eingebunden. Diese Überlegung hatte ich auch schon, hatte mich aber dagegen entschieden, weil kein einziger Winkel bekannt ist.
Dies Beispiel ist quasi ein Zwitter aus Berechnung und probieren.

Ich habe versucht mir darüber für das eingangs angedachte Gleichungssystem, Lösung 1, zusätzliche Gleichungen zu beschaffen.
Als rechnerische Lösung taugt dieses Verfahren hier nur bedingt, weil man am Schluss in der Tabelle einen passenden Winkel suchen muss.
Damit ist das Verfahren ähnlich zu bewerten wie vorher die grafische Lösung.

Fremdbeispiel 1
Lösung über Ähnlichkeit der Dreiecke und Trigonometrie.

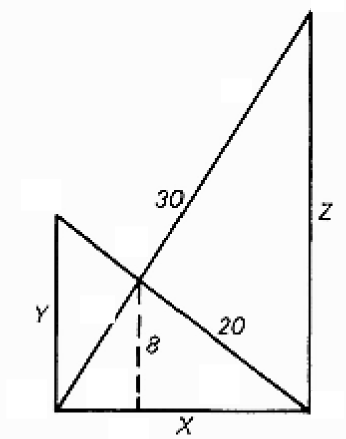


Bild 15

Lösung: Sind c und d der linke bzw. rechte Abschnitt der gesuchten Strecke x, so erhalten wir über die Ähnlichkeit von Dreiecken (Bild 15): $z = \frac{8x}{c}$, $y = \frac{8x}{d}$. Hieraus erhalten wir: $z + y = \frac{8x^2}{cd}$ und $zy = \frac{64x^2}{cd} = 8\,(z + y)$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken der Figur ergibt sich $900 - z^2 = 400 - y^2$ und hieraus $z^2 - y^2 = 500$. Interpretieren wir die letzte Beziehung an einem geeigneten rechtwinkligen Dreieck (Bild 16) geometrisch, so ergibt sich $\cos\alpha + \cot\alpha = \frac{\sqrt{500}\,(z + y)}{zy}$. Mit $zy = 8\,(z + y)$ erhalten wir hieraus $\cos\alpha + \cot\alpha = \frac{\sqrt{500}}{8} = 2{,}7951$.

Nun brauchen wir nur noch in der trigonometrischen Tafel einen Winkel herauszusuchen, dessen Kosinus und Kotangens sich zu 2,7951 addiert. Wir erhalten näherungsweise $\alpha = 27°\,38'\,30''$.

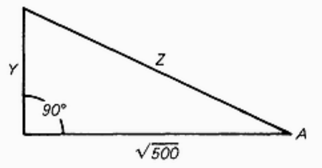


Bild 16

Damit ergibt sich $z = \frac{\sqrt{500}}{\cos\alpha} = 25{,}24$ und $x = \sqrt{900 - (25{,}24)^2} = 16{,}2$.

Auch diese Lösung kann noch weiter vereinfacht werden. Ein Leser schrieb uns „Die Figur (Bild 15) kann als Nomogramm für die Beziehung $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ gedeutet werden. Zusammen mit $\cos\alpha + \cot\alpha = \frac{\sqrt{500}}{z} + \frac{\sqrt{500}}{y}$ ergibt sich $\cos\alpha + \cot\alpha = \frac{\sqrt{500}}{8} = 2{,}7951$. Hieraus berechnet man $x = 16{,}2$ wie oben.

Dieser Lösungsweg funktioniert. Wobei sich den meisten Lesern aber schon nicht erschließen wird, wie man auf die beiden ersten Gleichungen für Z und Y kommt.

Daher will ich das erklären.
Dazu muss man die mathematischen Gesetze zur Ähnlichkeit von Dreiecken verwenden.

Es gilt für die Ähnlichkeit von Dreiecken:

Ähnlichkeitssatz WW
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei (und somit in allen drei) Winkeln übereinstimmen.

Ähnlichkeitssatz S:S:S
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen Verhältnissen der Längen entsprechender Seiten übereinstimmen.

Ähnlichkeitssatz S:W:S
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in einem Winkel und im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten übereinstimmen.

Ähnlichkeitssatz S:S:W
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie im Verhältnis der Längen zweier Seiten und im Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen.

ECI

Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

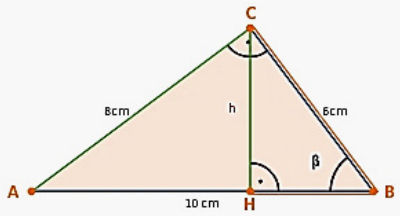
Berechnung 3b

Meine Überlegung war, mir mit diesen beiden Gleichungen $y = \frac{x*8}{d}$ und auch $z = \frac{8x}{c}$ mein Gleichungssystem, Lösungsweg 1 vom Anfang, zu erweitern.

Ich gehe also mal über die Ähnlichkeit der Dreiecke.

Beispiel dazu:

Dreieck BHC		Dreieck ABC	
$\overline{BC}$	entspricht	$\overline{AB}$	„lang“
$\overline{CH}$	entspricht	$\overline{AC}$	„mittel“
BH	entspricht	$\overline{BC}$	„kurz“



Du bildest die Seitenverhältnisse:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

und stellst die Verhältnisgleichung nach der gesuchten Strecke um.

$$\overline{CH} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Einsetzen der Werte:

$$\overline{CH} = 6 \cdot \frac{8}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$$

Die gesuchte Strecke $\overline{CH}$ist $4.8\,\mathrm{cm}$lag.

h= $4.8\,\mathrm{cm}$

Ich gehe bei allen weiteren Berechnungen vom folgenden Bild und seinen Werten und Bezeichnungen aus, das vereinfacht es.

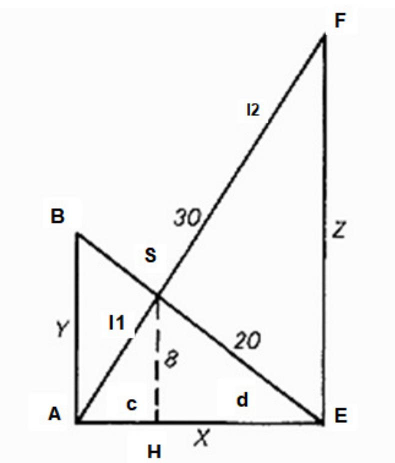


Bild 15

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

In unserem Fall gibt es 4 relevante Dreiecke

Das große Dreieck	AEF
Das zweitgroße Dreieck	ABE
Das kleine Dreieck	AHS
Und noch Dreieck	HES

Frage, gilt die Ähnlichkeit auch für die beiden Dreiecke AEF und ABE?
Ja, es gilt der Ähnlichkeitssatz S:W:S

Dreieck AEF		Dreieck ABE	Seite
AF = 30	**entspricht**	**BE = 20**	**lang**
EF = z	**entspricht**	**AE = x**	**mittel**
AE = x	**entspricht**	**AB = y**	**kurz**

Bei Dreieck AEF und Dreieck AHS ist klar, sie sind ähnlich. Die Winkel sind gleich. Es gilt also Ähnlichkeitssatz WW.

OK
Ich verwende Dreieck AEF und AHS
Damit kann man die Seiten ordnen und gegenüberstellen.

Dreieck AEF		Dreieck AHS	Seite
AF = 30	entspricht	AS = l1	lang
EF = z	entspricht	HS = 8	mittel
AE = x	entspricht	AH = c	kurz

Und komme dann auf folgende Beziehungen:

$\frac{AE}{EF} = \frac{AH}{HS}$ entspricht $\frac{x}{z} = \frac{c}{8}$ **gesprochen: AE verhält sich zu EF wie AH zu HS**

=> $x = \frac{z*c}{8}$ oder auch

$z = \frac{8x}{c}$ **Das ist die eine Formel in dem Fremdbeispiel 1**

Ich untersuche nun Dreieck ABE zu HES
Ähnlichkeit: WWW

Dreieck HES		Dreieck ABE	Seite
AF = l3	entspricht	BE = 20	lang
EF = 8	entspricht	AB = y	mittel
AE = d	entspricht	AE = x	kurz

Und komme da auf folgende Beziehungen:
$\frac{d}{8} = \frac{x}{y}$ => $\frac{d*y}{8} = x$

=> $\boldsymbol{y = \frac{x*8}{d}}$ **Das ist die zweite Formel in dem Fremdbeispiel 1,**

Also, so wird klar, wie man auf diese beiden Gleichungen kommt. Die Frage ist, bringen mich diese beiden zusätzlichen Gleichungen

$\boldsymbol{x = \frac{z*c}{8}}$ bzw. $\boldsymbol{z = \frac{8x}{c}}$

bei dem Gleichungssystem, das Herr Schmeh anfänglich einsetzen wollte, also Lösungsweg 1, weiter?
Ich habe es dann doch mal durchgerechnet.

Berechnungen immer noch Fall 1

Ich habe:

I $x^2 + y^2 = 400$

II $x^2 + z^2 = 900$

III $z = \frac{8x}{c}$

IV $y = \frac{8*x}{d}$

Es gilt außerdem c + d = x

V $x = c + d$

Ich habe also 5 Variablen: x,y,z,c,d und ich habe 5 Gleichungen. Das sollte normalerweise passen.

Auflösen von III nach c: => $c = \frac{8*x}{z}$

Auflösen von IV nach d: => $d = \frac{8*x}{y}$

Beides einsetzen in V => $x = \frac{8x}{z} + \frac{8x}{y}$ => $x = 8x * (\frac{1}{z} + \frac{1}{y})$ => $\frac{\cancel{x}}{8\cancel{x}} = (\frac{1}{z} + \frac{1}{y})$

=> $\frac{1}{8} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y}$ auflösen nach z => $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{y}$ mit -1 multipl.

$\frac{1}{z} = \frac{1}{8} - \frac{1}{y}$ umformen => $\frac{1}{z} = \left|\frac{8-y}{8*y}\right|$ => $z = \frac{8*y}{8-y}$

ECI Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

Pinghsiang Mikanshan Hangzhou SSS KDZ

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

z Einsetzen in II $x^2 + z^2 = 900$

=> $x^2 + (\frac{8*y}{8-y})^2 = 900$

Auflösen nach y:
zuerst umformen des Bruchs:

$(\frac{8*y}{8-y})^2$ => $\frac{(8*y)^2}{(8-y)^2} = \frac{8^2*y^2}{(8-y)^2}$

Man sieht im Nenner ein Binom:

$\frac{8^2*y^2}{8^2-2*8*y+y^2}$

Also gesamt:

$$x^2 + (\frac{8^2 * y^2}{8^2 - 2*8*y + y^2}) = 900$$

auflösen nach y:

```
(%i86) /*REM* Auflösen nach y */
       a: x^2+((8^2·y^2)/( 8^2−2·8·y+y^2 ))=900;
       solve (a,y);
```

(a) $\frac{64\,y^2}{y^2 - 16\,y + 64} + x^2 = 900$

(%o86) $[y = -\frac{64\sqrt{900-x^2} - 8\,x^2 + 7200}{x^2 - 836}, y = \frac{64\sqrt{900-x^2} + 8\,x^2 - 7200}{x^2 - 836}]$

$\boldsymbol{y_1 = \frac{64*\sqrt{900-x^2} - 8x^2 + 7200}{x^2 - 836}}$ $\boldsymbol{y_2 = \frac{64*\sqrt{900-x^2} + 8x^2 - 7200}{x^2 - 836}}$

einsetzen in Gleichung I $x^2 + y^2 = 400$

$$x^2 + (\frac{\mathbf{64 * \sqrt{900 - x^2} - 8x^2 + 7200}}{\mathbf{x^2 - 836}})^2 = 400$$

Man sieht schon, es wird immer unübersichtlicher. Ich habe dann mal versucht, Zahlen anzunehmen, um zu sehen was passiert.
Ich erspare dem Leser das, im Ergebnis führte es nicht zum Erfolg.

Man kann also sagen, die Aufstellung eines Gleichungssystems versagte, obwohl ich 5 Variablen: x,y,z,c,d und 5 Gleichungen habe, was normalerweise passen müsste.

Einen ersten Fehler fand ich.

Es wurde mir bewusst, dass die eigentlichen Pythagoras Gleichungen nicht passen.
Es gibt nämlich für die Dreieck ABE wie AEF eine Abhängigkeit zur Höhe des Schnitt-punkts. Diese Abhängigkeit floss so aber gar nicht ein.

Das heißt also, die beiden Pythagoras Gleichungen sind in Wahrheit nicht unabhängig.
Es fehlte also eine weitere Gleichung.

Also kurz gesagt, auch dieser Weg, über die Ähnlichkeit von Dreiecken zu einem Gleichungssystem zu kommen, klappte nicht!
(Das soll aber nicht heißen, dass dieser Weg grundsätzlich nicht klappt. Es fehlte aber etwas im Gleichungssystem. Was das ist, werden Sie im nächsten Verfahren sehen.)

Ich wechsele den Weg und gehe im nächsten Fall über den Gnomon Satz.

Wie Sei sehen werden, führt dieser Ansatz zum Erfolg und stellt eine rein rechnerische Lösung des Leiterproblems dar.

ECI
Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

Pinghsiang Mohanshan, Hangzhou SSS KDZ

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Vierter Weg über den Gnomon Satz

Erklärung dazu:

- **Allgemeiner nennt man Polygone** ähnlich, wenn die Dreiecke, in die sie sich zerlegen lassen, paarweise ähnlich sind.
- **Insbesondere sind zwei Rechtecke** nur dann ähnlich, wenn die Winkel zwischen Diagonale und Grundseite in beiden Rechtecken gleich sind.
- **Insbesondere sind zwei Quadrate** immer ähnlich zueinander.

Beispiel:
Betrachtet man zwei ähnliche Rechtecke ABCD und AEGI; der dazugehörige Gnomon BEGIDCB hat hier die Form eines L.
Das Teildreieck AEG des großen Rechtecks besteht aus zwei rechtwinkligen Dreiecken ABC und CFG, sowie einem Rechteck BEFC.

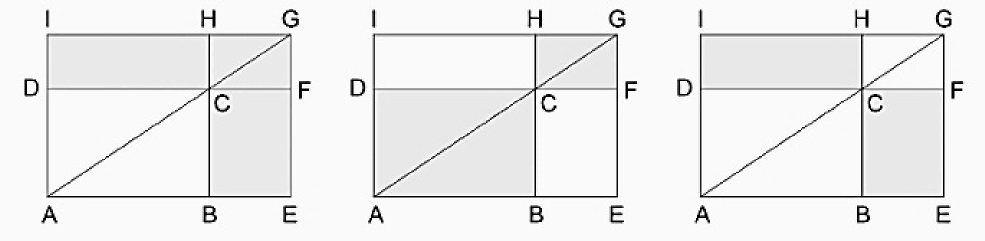


Abb. 5.3. Der Gnomonsatz bei Rechtecken

Offenbar ist die Fläche AEG des unteren Dreiecks gleich der Fläche AGI des oberen Dreiecks. Aus den gleichen Symmetriegründen sind auch die Flächen der Dreiecke ABC und ACD, sowie von CFG und CGH gleich. Also müssen auch die beiden Rechtecke BEFC und CHID den gleichen Flächeninhalt haben.

Gnomon Satz.
In der Figur von Abb. 5.3 sind die Flächen der Rechtecke BEFC und CHID gleich groß.

Anwendung auf die gekreuzten Leitern!

In der einfachsten Version stehen zwei sich kreuzende Leitern zwischen zwei Wänden, wobei die Höhen, an denen sie die Wände berühren, gleich a und b sind. Gesucht ist die Höhe c, in der sich die Leitern kreuzen.

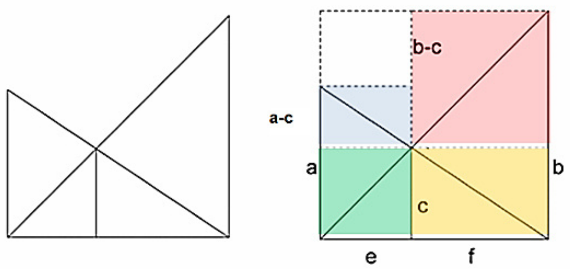


Abb. 5.4. Sich kreuzende Leitern

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Ich habe zur besseren Erkennung die verschiedenen Rechtecke farbig gemacht.
Ergänzt man das linke Diagramm so, dass sich der Gnomon Satz anwenden lässt, so folgen folgende Gleichungen:

ce = f (b − c) und cf = e(a − c)

Man sagt also, das Rechteck ce ist ähnlich dem Rechteck f (b − c) und
das Rechteck cf ist ähnlich dem Rechteck e(a − c)

Warum? - weil **insbesondere zwei Rechtecke** ähnlich sind, wenn die Winkel zwischen Diagonale und Grundseite in beiden Rechtecken gleich sind. Das ist hier gegeben!

=> $\frac{\mathrm{ce}}{f} = (\mathrm{b} - \mathrm{c})$ und $\frac{\mathrm{cf}}{e} = (\mathrm{a} - \mathrm{c})$

Multipliziert man beide Gleichungen miteinander

=> $\frac{ce}{\cancel{f}} * \frac{c\cancel{f}}{\cancel{e}} = (a-c) * (b-c)$

und kürzt e und f, erhält man
$c^2 = (a-c) * (b-c)$

woraus nach Auflösung der Klammern und Umformen die Lösung folgt.

umformen $c^2 = ab - ac - cb + c^2$ = $c^2 - c^2 = ab - ac - cb$ = $0 = ab - ac - cb$

=> $ac + cb = ab$ => $c(a+c) = ab$ => $c = \frac{a*b}{(a+c)}$

$\boldsymbol{c = \frac{a*b}{a+b}}$ Fällt Ihnen etwas auf liebe Leser?

Nun, diese Gleichung c ist das Missing Link aus Lösungsweg 1. Das ist im Grunde die zusätzliche Beziehung, die im Lösungsweg 1 bei den Gleichungen fehlte.

Kommen wir zur schwierigeren Variante dieses Leiterproblems, da sind die Längen **m** und **n** der Leitern gegeben, sowie die Höhe **c**, in der sie sich kreuzen, und gesucht ist der Abstand x der beiden Wände.
Das ist der Fall um den es uns geht.

Es gelten hier die beiden Pythagoras Gleichungen:

$a^2 + x^2 = m^2$ $b^2 + x^2 = n^2$

und $c = \frac{a*b}{a+b}$

Auflösen der beiden Pythagoras Gleichungen nach a und b ergibt

$a = \sqrt{m^2 - x^2}$ $b = \sqrt{n^2 - x^2}$

und Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt:

$$c = \frac{\sqrt{m^2-x^2} * \sqrt{n^2-x^2}}{\sqrt{m^2-x^2} + \sqrt{n^2-x^2}}$$

Umformen.
Das führt auf eine Gleichung 4. Grades

=> $c * (\sqrt{m^2 - x^2} + \sqrt{n^2 - x^2}) = \sqrt{m^2 - x^2} * \sqrt{n^2 - x^2}$ **(1)**

oder die Normalform
$c * \left(\sqrt{m^2 - x^2} + \sqrt{n^2 - x^2}\right) - \sqrt{m^2 - x^2} * \sqrt{n^2 - x^2} = 0$ **(1b)**

für Maxima aufbereitete Schreibweise
$c * (sqrt(m^2 - x^2) + sqrt(n^2 - x^2)) - sqrt(m^2 - x^2) * sqrt(n^2 - x^2) = 0$

Ich versuch erst mal zu vereinfachen, ausmultiplizieren usw..

$c * \sqrt{m^2 - x^2} + c * \sqrt{n^2 - x^2} = \sqrt{m^2 * n^2 + x^4 - m^2 * x^2 - n^2 * x^2}$ **(2)**

Gleichung quadrieren, auf der rechten Seite entfällt die Wurzel

=> $(c * \sqrt{m^2 - x^2} + c * \sqrt{n^2 - x^2})^2 = m^2 * n^2 + x^4 - m^2 * x^2 - n^2 * x^2$ **(3)**

Linke Seite entspricht einem Binom $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a≙ $c * \sqrt{m^2 - x^2}$; b ≙ $c * \sqrt{n^2 - x^2}$

vereinfachen:

Es gilt für a: $(c * \sqrt{m^2 - x^2})^2 = c^2 * (m^2 - x^2)$

Es gilt für b: $(c * \sqrt{n^2 - x^2})^2 = c^2 * (n^2 - x^2)$

2ab ≙ $2 * c * \sqrt{m^2 - x^2} * c * \sqrt{n^2 - x^2}$) => $2c^2 * \sqrt{m^2 - x^2} * \sqrt{n^2 - x^2}$

=> $c^2 * (m^2 - x^2) + 2c^2 * \sqrt{m^2 - x^2} * \sqrt{n^2 - x^2} + c^2 * (n^2 - x^2)$

Diesen Teil durch ausmultiplizieren vereinfachen,:

(%i1) fullratsimp((c·sqrt(m^2−x^2)+c·sqrt(n^2− x^2))^2);

(%o1) $2\,c^2\,\sqrt{m^2-x^2}\,\sqrt{n^2-x^2}-2\,c^2\,x^2+c^2\,n^2+c^2\,m^2$

$$2c^2 * \sqrt{m^2-x^2} * \sqrt{n^2-\ x^2} + c^2 * (m^2-x^2) +\ c^2 * (n^2-x^2)$$

=> $2c^2 * \sqrt{m^2-x^2} * \sqrt{n^2-\ x^2} + c^2m^2 - 2c^2x^2 +\ c^2n^2$

=> $2c^2 * \sqrt{m^2-x^2} * \sqrt{n^2-\ x^2} + c^2m^2\ - 2c^2x^2 + c^2n^2 +\ c^2m^2$

Die gesamte Gleichung lautet dann:

$$2c^2 * \sqrt{m^2-x^2} * \sqrt{n^2-\ x^2} + c^2m^2\ - 2c^2x^2 + c^2n^2 +\ c^2m^2\ =\ \ m^2 * n^2 + x^4 - m^2 * x^2 - n^2 * x^2 \quad \textbf{(4)}$$

Tja, super gelaufen, es hat die Sache nicht wirklich verbessert. ;-))
Ich arbeite daher mit der Gleichung **(3)** weiter.

$$\left(\boldsymbol{c} * \sqrt{\boldsymbol{m}^2-\boldsymbol{x}^2} + \boldsymbol{c} * \sqrt{\boldsymbol{n}^2-\ \boldsymbol{x}^2}\right)^2 =\ \ \boldsymbol{m}^2 * \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{x}^4 - \boldsymbol{m}^2 * \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{n}^2 * \boldsymbol{x}^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Bringe die Gleichung in die Normalform:

$$\left(c * \sqrt{m^2-x^2} + c * \sqrt{n^2-\ x^2}\right)^2 -\ \ m^2 * n^2 - x^4 + m^2 * x^2 + n^2 * x^2 = 0 \qquad \textbf{(3b)}$$

Es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades.
Das ist sehr unangenehm.
Die elementare Lösung ist sehr aufwendig, wenn sie überhaupt klappt.

Der italienische Mathematiker Lodovico Ferrari (1522-1565) hat für Gleichungen 4. Grades zwar einen Lösungsweg entwickelt, den man unter Umständen verwenden kann, die Rechnung ist aber sehr aufwendig und läuft auch noch über eine kubische Gleichung, die zu lösen ist.
Ich habe es nicht ausprobiert, glaube aber, das Verfahren würde in diesem Fall versagen, weil wir es auch noch mit einer Wurzelgleichung zu tun haben.
Das Verfahren geht normalerweise von einer Normalform der Gleichung aus.

Also etwas in dieser Art.
$x^4 + a * x^3 + b * x^2 + c * x + d = 0$

Sollte der Faktor vor $x^4 \neq 1$ sein, dann wird durch diese Zahl geteilt, um auf 1 zu kommen.

ECI Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider - Prof. Dr. Hartmut Weisert - Angelika Schneider

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Es handelt sich auch nicht um einen Spezialfall, der Gestalt, dass man ein x^4 und ein x^2 hat, wodurch man durch eine Substitution z.B. a=x^2 eine Gleichung 2. Ordnung hätte, die zu lösen ist.

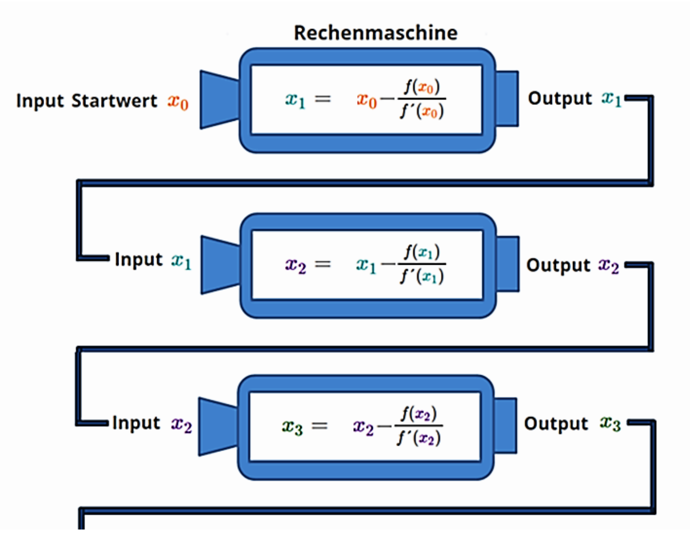
Ich habe mich daher entschlossen, die Gleichung numerisch zu lösen.
Dazu bietet sich das Newton Verfahren an.

Das Newton-Verfahren dient zur Annäherung an Nullstellen. Durch das immer wieder neue Einsetzen des Ergebnisses in die Newton-Formel nähert man die Nachkommastellen der Nullstelle immer mehr an. Diese Art von Verfahren nennt man Iterationsverfahren.

Die Iterationsformel lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Da gewisse Nullstellen nicht genau bestimmbar sind, wird das Newton-Verfahren eingesetzt, um Nullstellen anzunähern. Dabei geht man mit einem Startwert los, den man möglichst sinnvoll wählt, in der Nähe der tatsächlichen Nullstelle.



Dies bedeutet, dass Ergebnisse eines Schrittes wieder als Ausgangswert für den jeweils nächsten Schritt genommen werden.

Man kann das zu Fuß machen, bei der komplexen Gleichung oben ist das aber auch viel Arbeit, weil man etwa 4-5 Iterationen durchrechnen sollte, um auf ein hinreichend genaues Ergebnis zu kommen. Weiterhin muss man die Ableitung der Funktion bilden.

Aus diesem Grund habe ich ein entsprechendes Programm eingesetzt. Es handelt sich um wxMaxima, ein CAS Programm, Computeralgebrasystem. Es ist übrigens eine Freeware.

BACKSTAGE **A**SSETS **M**ANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

Konvergenz
Bei günstiger Wahl des Startwertes, d.h. der Startwert liegt "hinreichend nah" bei der gesuchten Nullstelle, besitzt das Newton-Verfahren eine quadratischer Konvergenzordnung (q=2), d.h. die Zahl der korrekten Dezimalstellen verdoppelt sich nahezu in jedem Schritt.

Also wieder auf dieser Basis gearbeitet:

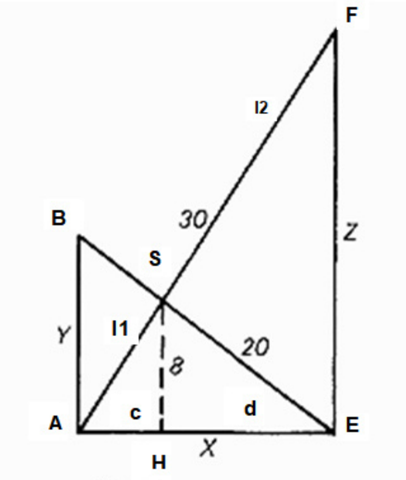


Bild 15

Als Startwert verwendete ich 18.

Ergebnis Newton:

```
(%i7) kill(all)$;
(%i4) c:8$; n:20$; m:30$;
→     load(mnewton)$;
(%i5) mnewton( (c·sqrt(m^2−x^2)+ c·sqrt(n^2− x^2 ))^2= m^2 ·n^2+x^4−m^2·x^2−n^2·x^2, [x], [18] ), numer;
(%o5) [[x =16.2121258966917]]
```

Das Ergebnis 16,212 m stimmt mit dem Ergebnis des Lösungswegs 3, = dem Fremdbeispiels 1 überein.

Ich teste das Ergebnis dennoch mal.

Berechnen der Dreiecke:

Dreieck AEB
Aus Pythagoras ergibt sich:

$y^2 + 16.212^2 = 20^2$ => $y = \sqrt{20^2 - 16.212^2} = 11{,}71$

Dreieck AEF
Aus Pythagoras ergibt sich:

$z^2 + 16.212^2 = 30^2$ => $z = \sqrt{30^2 - 16.212^2} = 25{,}24$

Damit hat man für beide Leitern die Eckpunkte einer Geradengleichung.
Nimmt man die linke untere Ecke, also Punkt A als Koordinatenursprung,

Dann sind die Koordinaten von Leiter 20:
x1= 16,212 , y1 = 0
x2 = 0 y2 = 11,71

Von Leiter 30 lauten die Koordinaten:
x1 = 0 y1= 0
x2 = 16,212 y2 = 25,24

Damit hat man 2 Punkte jeder Geradengleichung, um diese aufzustellen.
Es gilt für die Geraden Gleichung:

$y = m * x + n$

Mit Steigung m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

n ist die Verschiebung auf der y-Achse

Damit ergibt sich für die 30m Leiter folgende Gleichung:
Koordinaten von Leiter 30:
x1 = 0 y1= 0
x2 = 16,212 y2 = 25,24

=> $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25{,}24 - 0}{16{,}212 - 0} = 1{,}557$

Schnittpunkt mit der X-Achse, also n ist = 0

Die Geradengleichung L30 lautet also:

BACKSTAGE ASSETS MANAGEMENT AG
Poststrasse 24 - CH- 6300 Zug (Switzerland)

MSG International FZE
Engineering office - Investment
E-Mail: MaMax-trade@gmx.de
Sharjah, SAIF Zone
Executive Desk Q1-07-118/B
P.O. Box 123929 / UAF

$\boldsymbol{y_{30} = 1,557 * x + 0}$

Damit ergibt sich für die 20m Leiter folgende Gleichung:
Koordinaten von Leiter 20:
x1= 16,212 , y1 = 0
x2 = 0 y2 = 11,71

=> $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11{,}71-0}{0-16{,}212} = -0{,}72$

Schnittpunkt mit der X-Achse, also n ist = 11,71

Die Geradengleichung L20 lautet also:
=> $\boldsymbol{y_{20} = -0,72 * x + 11,71}$

Beide Gleichungen müssen nun die Bedingung erfüllen, dass beim gleichem x Wert der Funktionswert f(x) = y = 8m sein muss!

x ist also gesucht.

Also y = 8m einsetzen und nach x auflösen.

Für die 30m Leiter gilt:

$y_{30} = 1{,}557 * x_{30} + 0$ => $\frac{8m}{1{,}557} = x_{30} = 5{,}1m$

Für die 20m Leiter gilt:

$y_{20} = -0{,}72 * x_{20} + 11{,}71$ => $\frac{8m-11{,}71m}{-0{,}72} = x_{20} = 5{,}1m$

Damit ist die Rechnung zur Raumbreite bestätigt.

Raumbreite x = 16,212m stimmt.
Bei dieser Raumbreite haben beide Leitern einen gemeinsamen Schnittpunkt mit der Ordinate 8m, und zwar bei der gleichen x Koordinate, bei x = 5,1m.

Würde x = 16,212 nicht stimmen, dann wäre der Schnittpunkt nicht bei 8m gewesen.

Ok, das war wirklich ein sehr aufwendiger Weg. Ich hoffe aber, dass Ihnen insbesondere der letzte Weg für Ihre Aufgaben hilft.

Herzlich
Dipl. Ing.(TU) Michael Schneider